

Sección 2

Conducción régimen transitorio

1. Introducción

2. Transferencia de calor por conducción

2.1 Introducción

2.2 Ecuación general

2.3 Condiciones de frontera

2.4 Conducción en estado estable unidimensional sin y con generación

2. Continuación

2.5 Paredes compuestas

2.6 Superficies extendidas (aletas)

2.7 Conducción en estado estable bidimensional sin generación
Método analítico.

2.8 Conducción en estado transitorio unidimensional. Método analítico.

2.9 Conducción en estado transitorio bidimensional con y sin generación

2.10 Métodos numéricos

OBJETIVOS

1. Entender y resolver problemas relacionados con problemas de conducción de calor en régimen transitorio
2. Aprender a resolver ecuaciones en derivadas parciales por medio de métodos numéricos. Aplicadas a la resolución de fenómenos de conducción (difusión) en régimen permanente y transitorio.

MANUALES DE PROGRAMACIÓN

- 1. <http://www.programatium.com/c.htm>**
- 2. <http://www.cplusplus.com/doc/tutorial/>**
- 3.
<http://www.cprogramming.com/tutorial.html>**
- 4. [wikipedia...](http://en.wikipedia.org/wiki/C_(programming_language))**

CONDUCCIÓN TRANSITORIA

- En el curso se ha ido incrementando gradualmente la complejidad de las situaciones estudiadas. Pero no se han estudiado casos en los que la temperatura varíe con el tiempo (transitorio)
- Los problemas de transferencia de calor dependientes del tiempo son frecuentes. Surgen debido a la variación de las condiciones de frontera
- Al inicio se considerará que la temperatura dentro del sólido permanece constante $T(t)$, luego la temperatura podrá variar con la posición y con el tiempo $T(x,t)$ en 1D o $T(x,y,t)$ en 2D

Sist. concentrados/resistencia interna despreciable

- Los sistemas concentrados son aquellos en los que la temperatura interior no varía con la posición: $T(t) \Rightarrow$ todo el sistema se encuentra a la misma temperatura
- Bola de cobre vs trozo de carne
- Ocurre cuando la resistencia al interior del cuerpo es muy pequeña comparada con la resistencia a la transferencia de calor entre el sistema y los alrededores.
- La transferencia de calor se determina por medio de un balance de calor global

$(\text{Transf. calor desde el cuerpo}) = (\text{Increm. energía en el tiempo})$

$$-hA(T - T_{\infty}) = m\bar{c} \frac{dT}{dt}$$

Sistemas concentrados

Reemplazando $m = \rho V$ y haciendo un cambio de variable

$$\theta = T - T_{\infty} \rightarrow$$

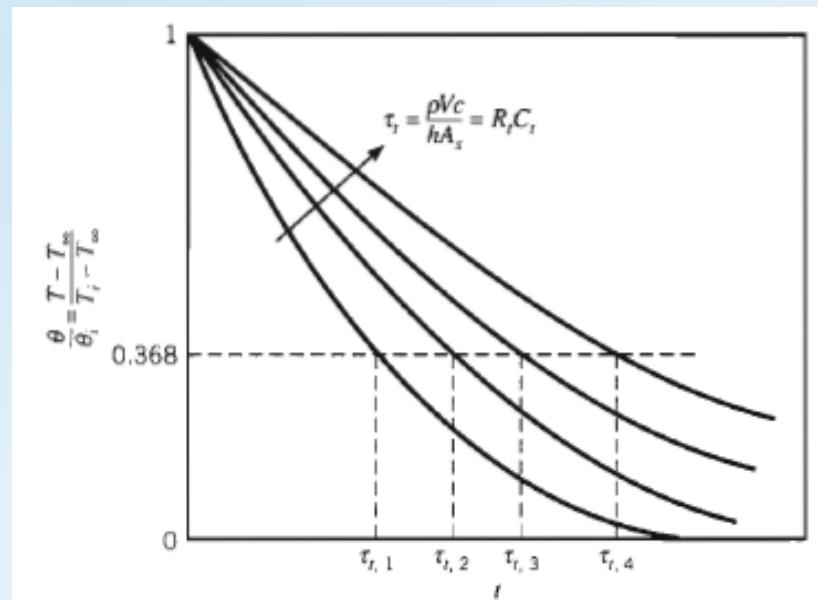
$$-hA\theta = \rho V c \frac{d\theta}{dt} \rightarrow -\frac{\rho V c}{hA} \frac{d\theta}{\theta} = dt$$

$$\frac{-\rho V c}{hA} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^t dt \rightarrow t = \frac{-\rho V c}{hA} \ln(\theta/\theta_i)$$

O también

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-t \frac{hA}{\rho V c}}$$

El inverso de la cte en el exp se conoce como cte de tiempo térmica τ_t



Sistemas concentrados

Conociendo la temperatura se puede evaluar el intercambio de calor con los alrededores y por tanto también el cambio en la energía interna del sistema

$$\dot{Q}(t) = hA(T(t) - T_{\infty}) \quad [W]$$

La cantidad total de calor transferida entre el sistema y el medio desde $t=0$ hasta $t=t$ será

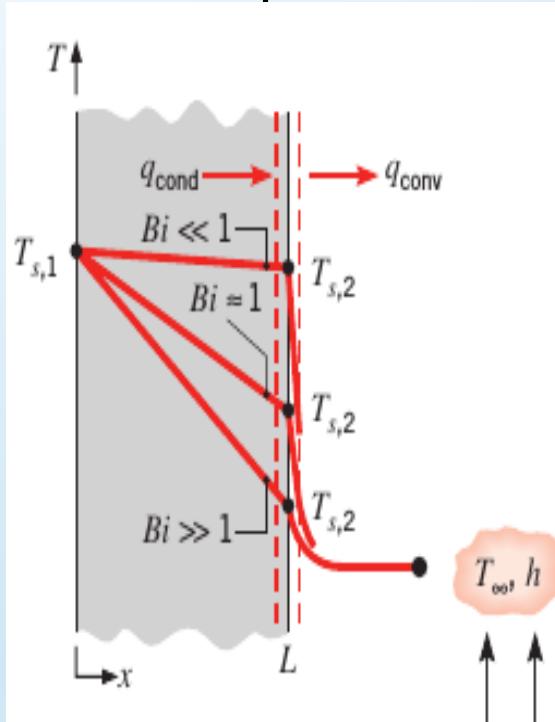
$$Q(t) = m\bar{c}(T(t) - T_I) \quad [kJ]$$

El calor máximo transferido se alcanzará cuando la temperatura del cuerpo sea la de los alrededores

$$Q_{max} = m\bar{c}(T_{\infty} - T_I) \quad [kJ]$$

Validez del método

- Dada la sencillez del método resulta importante establecer cuando es adecuado aplicarlo
- Existe un parámetro que cuantifica cuan exacto es el método. Para obtenerlo se considera la conducción en una placa que es enfriada por convección.



$$kA \frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{L} = hA(T_{s,2} - T_{\infty})$$

$$\frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{(T_{s,2} - T_{\infty})} = \frac{(L/kA)}{(1/hA)} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}}$$

$$\frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{(T_{s,2} - T_{\infty})} = \frac{hL}{k} \equiv Bi$$

Validez del método

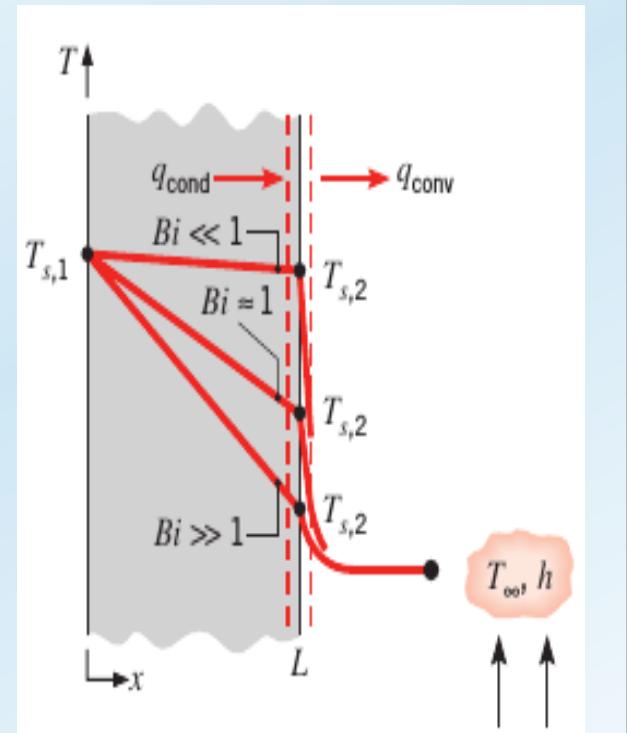
$$\frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL}{k} \equiv Bi$$

Bi es el número de Biot. Por conveniencia se define $L=V/As$ (fácil geom complejas)

Puede ser interpretado como la relación entre las resistencias. Si **Bi** << 1 la resistencia de conducción es mucho menor que la de convección. **El método puede ser aplicado.**

También se puede entender como la relación entre la diferencia de temperaturas en el sólido, respecto a la de los alrededores

Si **Bi** << 1 la variación de la temperatura dentro del cuerpo es pequeña



Validez del método

En general se considera adecuado el uso del método de resistencia despreciable o modelo de sistema concentrado si

$$Bi < 0.1$$

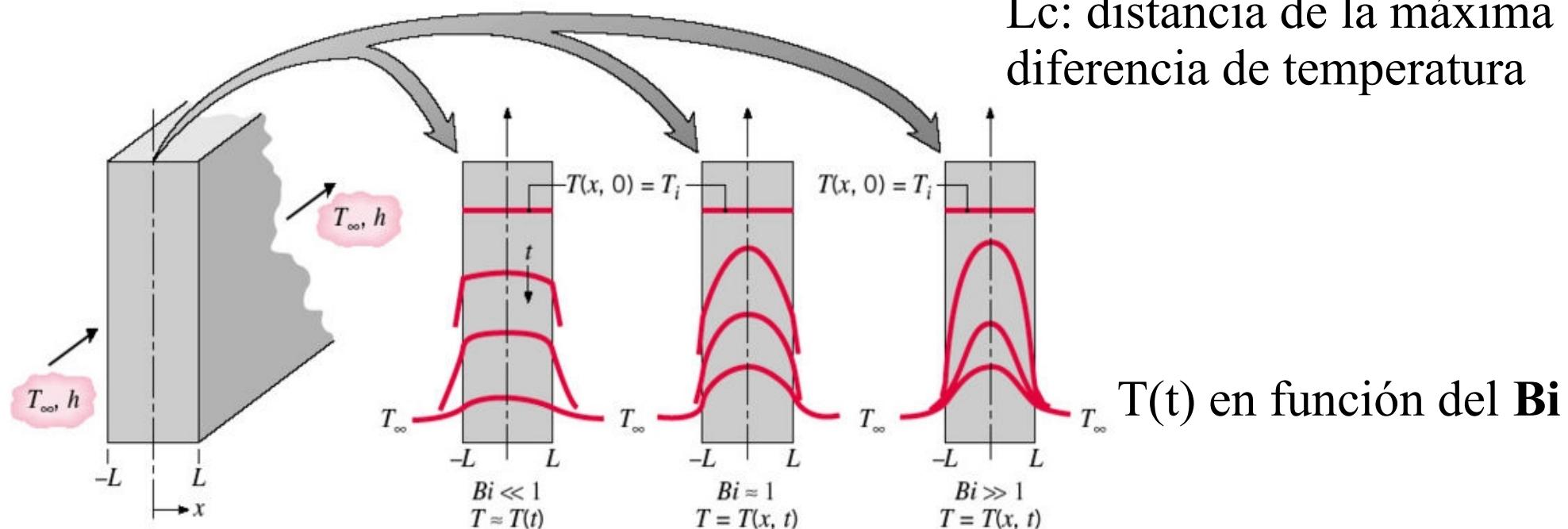


FIGURE 5.4 Transient temperature distributions for different Biot numbers in a plane wall symmetrically cooled by convection.

- Reemplazando $L=V/As$ en la ecuación de Θ se obtiene

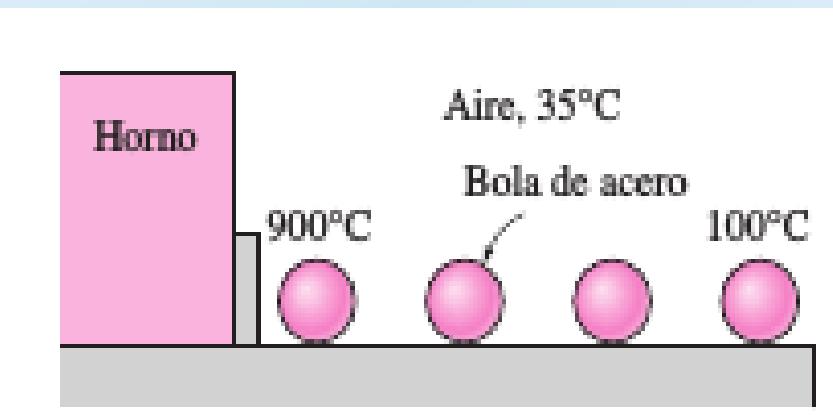
$$\frac{hAt}{\rho V c} = \frac{ht}{\rho c L} = \frac{hL}{k} \frac{k}{\rho c} \frac{t}{L^2} = \frac{hL}{k} \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$\frac{hAt}{\rho V c} = Bi \cdot Fo \quad , \quad Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

- Fo*** es el número de Fourier. El cual es un tiempo adimensional que caracteriza problemas transitorios

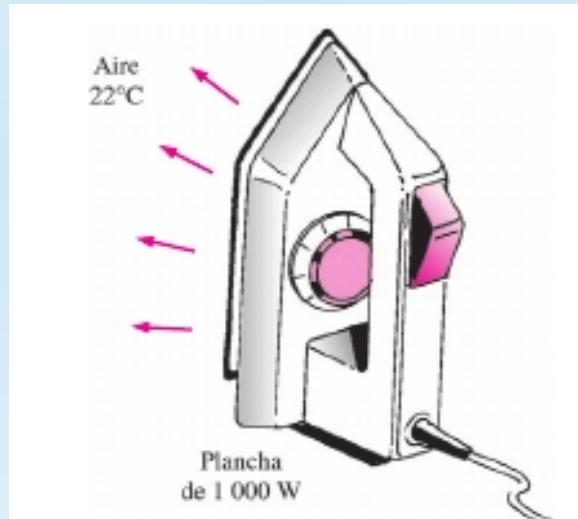
Ejercicio

Bolas de acero al carbón ($\rho=7833\text{kg/m}^3$, $k=54\text{W/m}^\circ\text{C}$, $C_p=0.465\text{kJ/kg}^\circ\text{C}$ y $\alpha=1.474\times10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$) de 8 mm de diámetro se recuecen calentándolas primero hasta 900°C en un horno y a continuación, dejándolas enfriar con lentitud hasta 100°C en aire ambiente a 35°C . Si $h=75\text{W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$, determine cuánto tardará el proceso de recocido. Si se deben recocer 2500 bolas por hora, determine la razón total de transferencia de calor de las bolas al aire ambiente.



Ejercicio

Consideré una plancha de 1000 W cuya base está hecha de aleación de aluminio 2024-T6 ($\rho=2770 \text{ Kg/m}^3$, $C_p=875 \text{ J/Kg}^* \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha=7.3*10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$). La placa base tiene un área superficial de $0,03 \text{ m}^2$ y un espesor de 5mm. En un principio la placa esta en equilibrio térmico con el ambiente a 22°C . Si el coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie de la placa base es de $12 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ y se supone que el 85% del calor generado en los alambres de resistencia se transfiere a la placa, determine el tiempo que pasará para que la temperatura de ésta llegue a 140°C . ¿Es realista suponer que la temperatura de la placa es uniforme en todo momento?



Conducción unidimensional transitoria

- **Pared plana $T(x,t)$**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

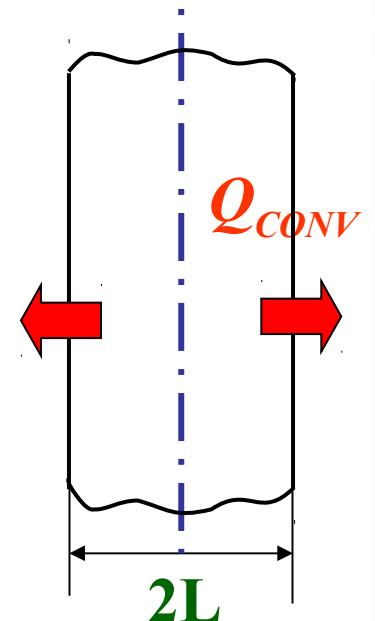
- Considerar: sin generación, 1D, prop. físicas ctes, espesor $2L$, inicialmente a T_i expuesta al ambiente a T_∞ con un h

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} , \quad T(x,0) = T_i$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 , \quad -k \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t) - T_\infty]$$

$$T = f(x, L, t, k, \alpha, h)$$

- Adimensionalizando con $X=x/L$ y $\theta = (T - T_\infty) / (T_i - T_\infty)$



Conducción unidimensional placa plana

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial (x/L)} = \frac{L}{T_i - T_\infty} \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{L^2}{T_i - T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{T_i - T_\infty} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{L^2}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial \theta(1,t)}{\partial X} = \frac{hL}{k} \theta(1,t)$$

- Introduciendo el número de Fourier y Bi

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo} \quad , \quad \frac{\partial \theta(1,Fo)}{\partial X} = -Bi \theta(1,Fo)$$

$$\frac{\partial \theta(0,Fo)}{\partial X} = 0 \quad , \quad \theta(X,0) = 1$$

Conducción unidimensional placa plana

$\theta(X, Fo) \rightarrow$ Temperatura adimensional

$X = \frac{x}{L} \rightarrow$ Distancia adimensional

$Bi = \frac{hL}{k} \rightarrow$ Coeficiente adimensional de transferencia

$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \rightarrow$ Tiempo adimensional

$\theta = f(X, Bi, Fo)$

Conducción unidimensional placa plana

- **Solución exacta**

aplicando el método de separación de variables con

$$\theta(X, Fo) = F(X) \cdot G(Fo)$$

imponiendo las condiciones de contorno se obtiene:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 Fo} \cos(\lambda_n X)$$

$$C_n = \frac{4 \sin \lambda_n}{2 \lambda_n + \sin(2 \lambda_n)}$$

$$\lambda_n \tan \lambda_n = Bi$$

Conducción unidimensional placa plana

- **Solución aproximada**

si $Fo > 0.2$ la serie se puede aproximar usando sólo el primer término (error < 2%)

$$\theta = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \cos(\lambda_1 X)$$

C_1 y λ_1 se obtienen de tablas en función del Bi.

- En el centro de la pared $\theta_0 = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo}$
- Las temperaturas en cualquier posición están relacionadas con la del centro así:

$$\theta = \theta_0 \cos(\lambda_1 X)$$

- La variación de la temperatura en cualquier punto respecto al tiempo es la misma que la del centro de la pared

Conducción unidimensional transitorio

- **Solución aproximada**

para el caso de cilindros y esferas se puede realizar el mismo procedimiento.

- **Cilindro:**

$$\theta_{cil} = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} Jo(\lambda_1 r / r_0) , \quad \theta_{0,cil} = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \frac{\theta_{cil}}{\theta_{0,cil}} = Jo(\lambda_1 r / r_0)$$

- **Esfera:**

$$\theta_{esf} = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \left[\frac{\sin(\lambda_1 r / r_0)}{\lambda_1 r / r_0} \right] , \quad \theta_{0,esf} = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \frac{\theta_{esf}}{\lambda_1 r / r_0} = \frac{\sin(\lambda_1 r / r_0)}{\lambda_1 r / r_0}$$

Conducción unidimensional transitorio

Solución aproximada flujo de calor

$$Q_{max} = \rho V c_p (T_{\infty} - T_I) \quad [kJ]$$

- Placa plana:

$$\frac{Q_{placa}}{Q_{max, placa}} = 1 - \theta_{0, placa} \frac{\sin(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

- Cilindro:

$$\frac{Q_{cil}}{Q_{max, cil}} = 1 - 2 \theta_{0, cil} \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

- Esfera:

$$\frac{Q_{esf}}{Q_{max, esf}} = 1 - 3 \theta_{0, esf} \frac{\sin(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)}{\lambda_1^3}$$

Conducción unidimensional transitorio

$$A_1 = C_1$$

Bi	Pared plana		Cilindro		Esfera	
	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000

Conducción unidimensional transitorio

η	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202
2.6	-0.0968	-0.4708
2.8	-0.1850	-0.4097
3.0	-0.2601	-0.3391
3.2	-0.3202	-0.2613

Funciones de Bessel de cero y primer orden

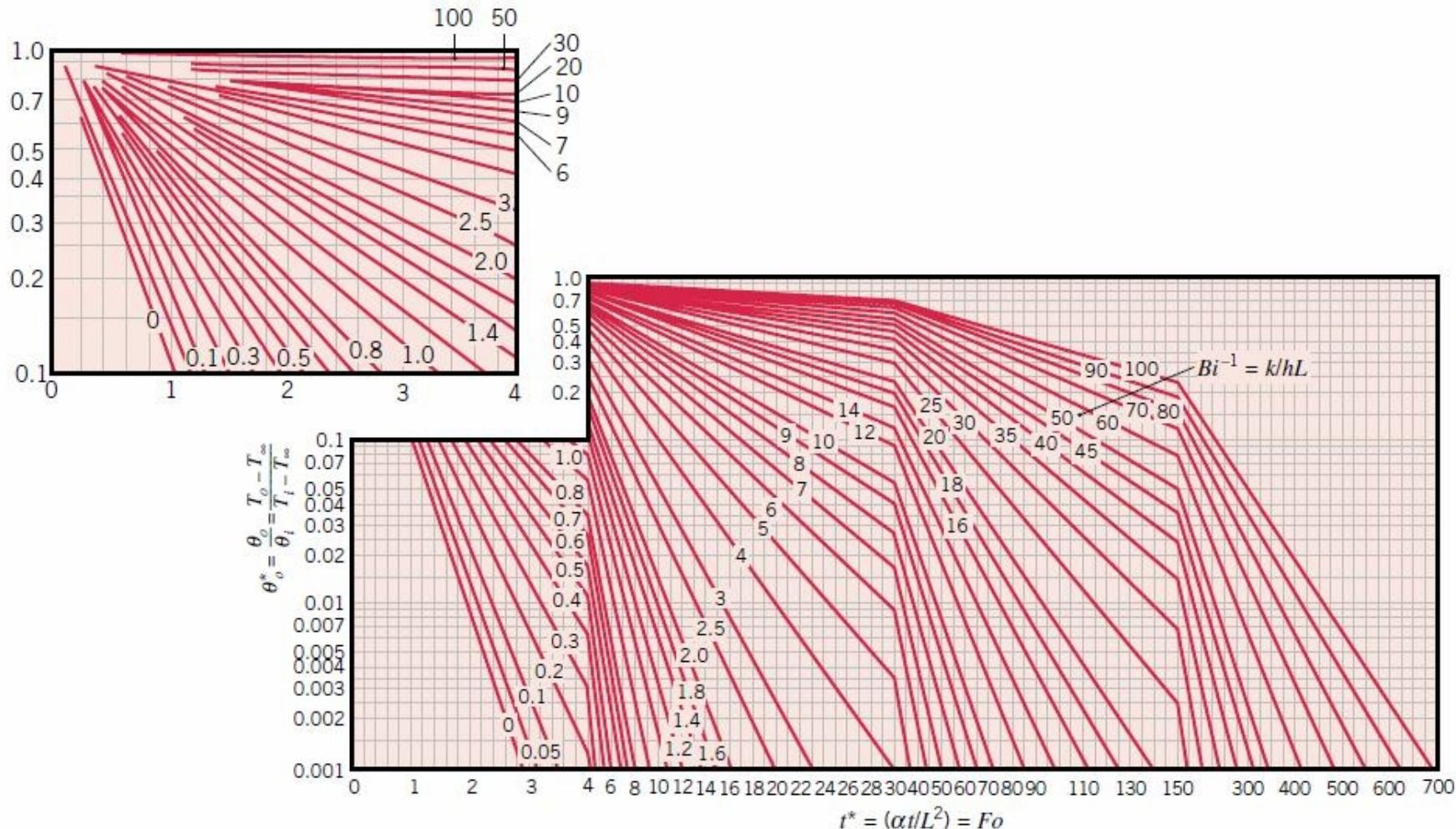
Solución aproximada de Heisler

- **Solución aproximada**

para $Fo > 0.2$ se desarrollaron gráficas que permiten aproximar la temperatura y el flujo de calor en placas, cilindros y esferas en función del Bi y de Fo .

- Son gráficas difíciles de leer para $Fo < 1$

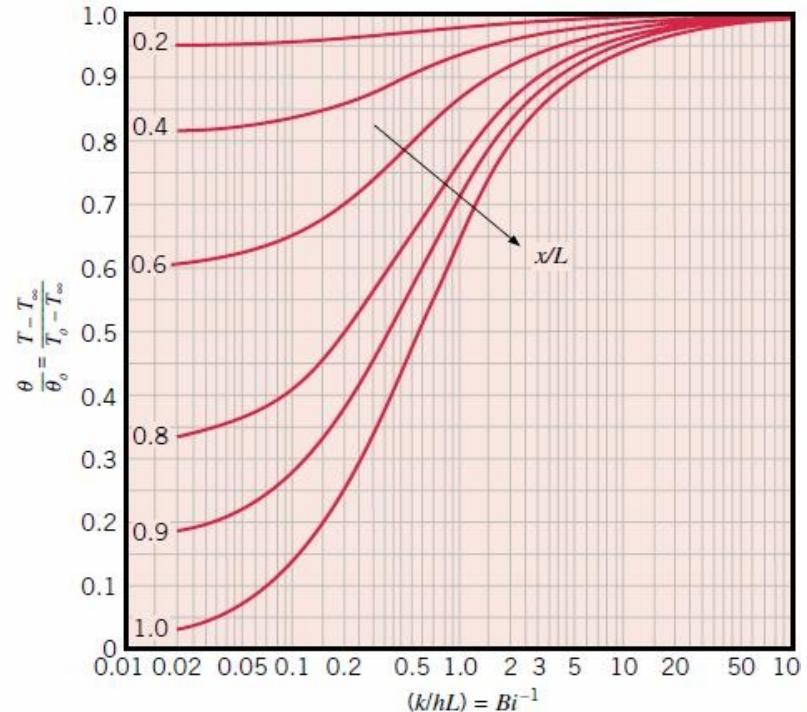
Gráficas de Heisler



$$\frac{x}{L} \in [0,1]$$

To: temperatura en el plano central de la placa = $T(x=0, t)$

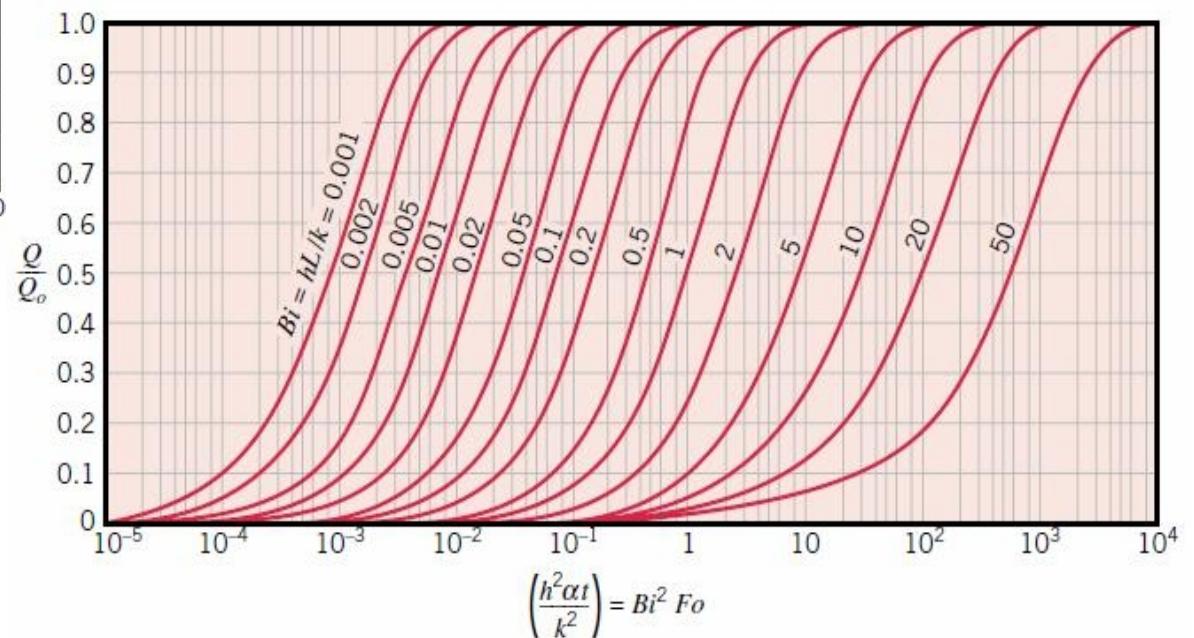
Gráficas de Heisler



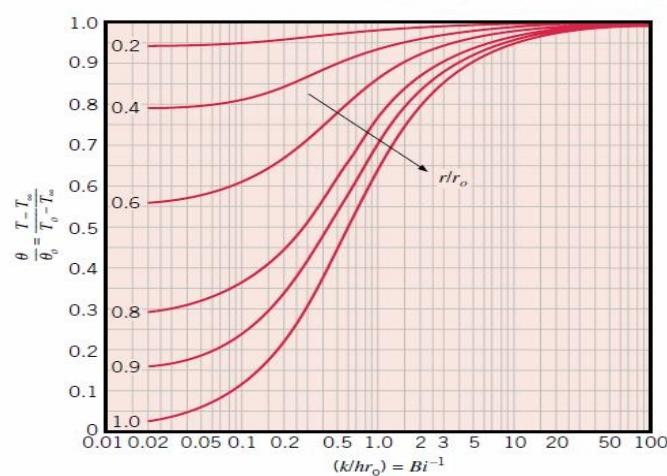
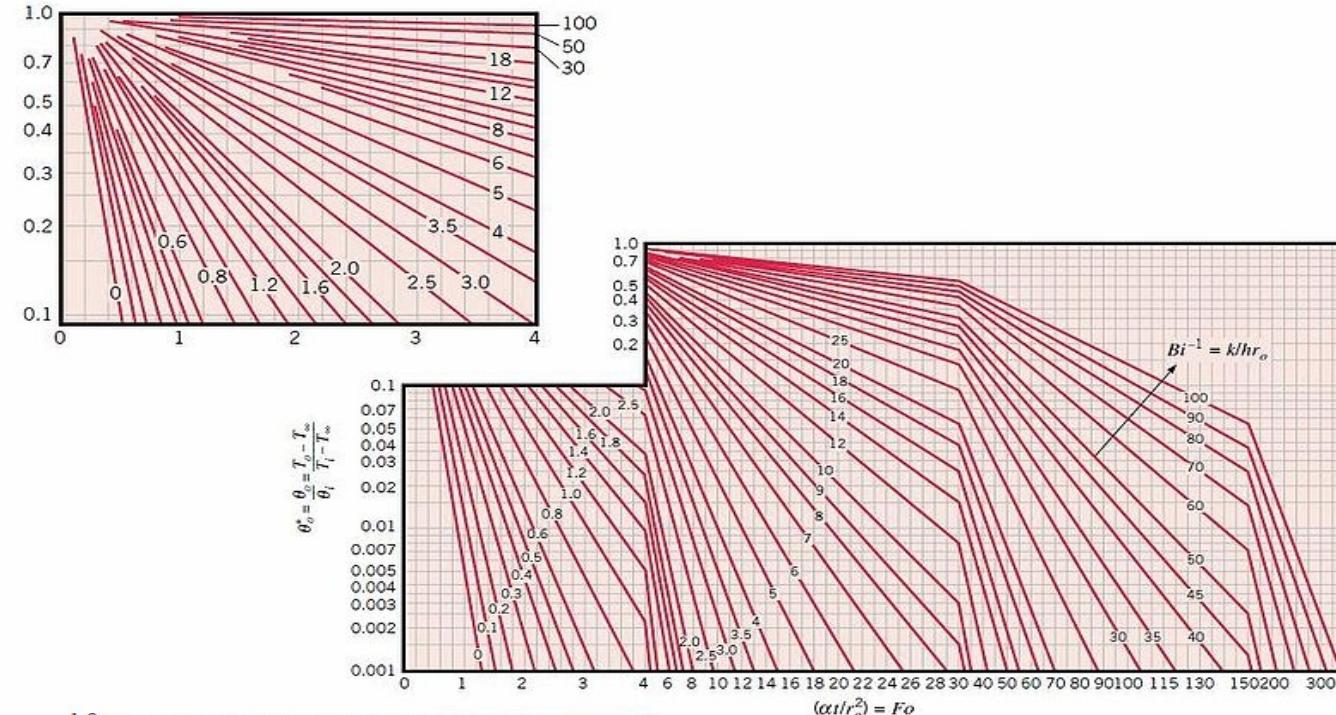
$$Q(t) = \left(\frac{Q}{Q_0} \right) \cdot Q_0$$

FIG.7

$$Q_0 = \rho \cdot V \cdot C_p \cdot (T_i - T_\infty)$$



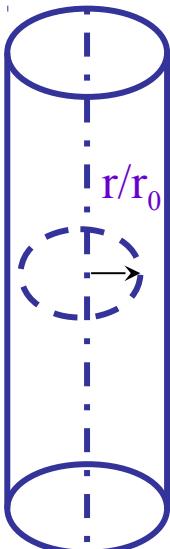
Heisler cilindros



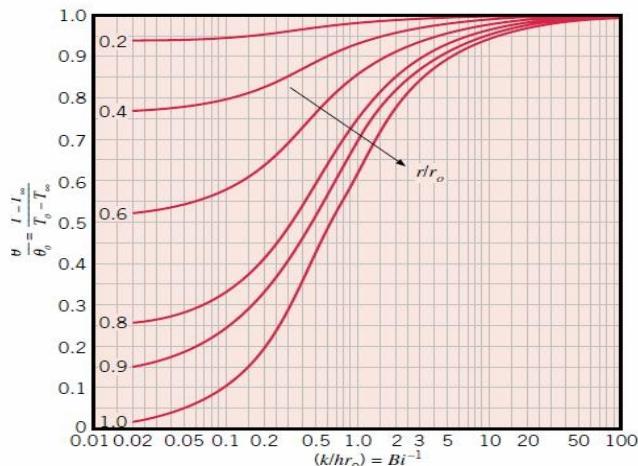
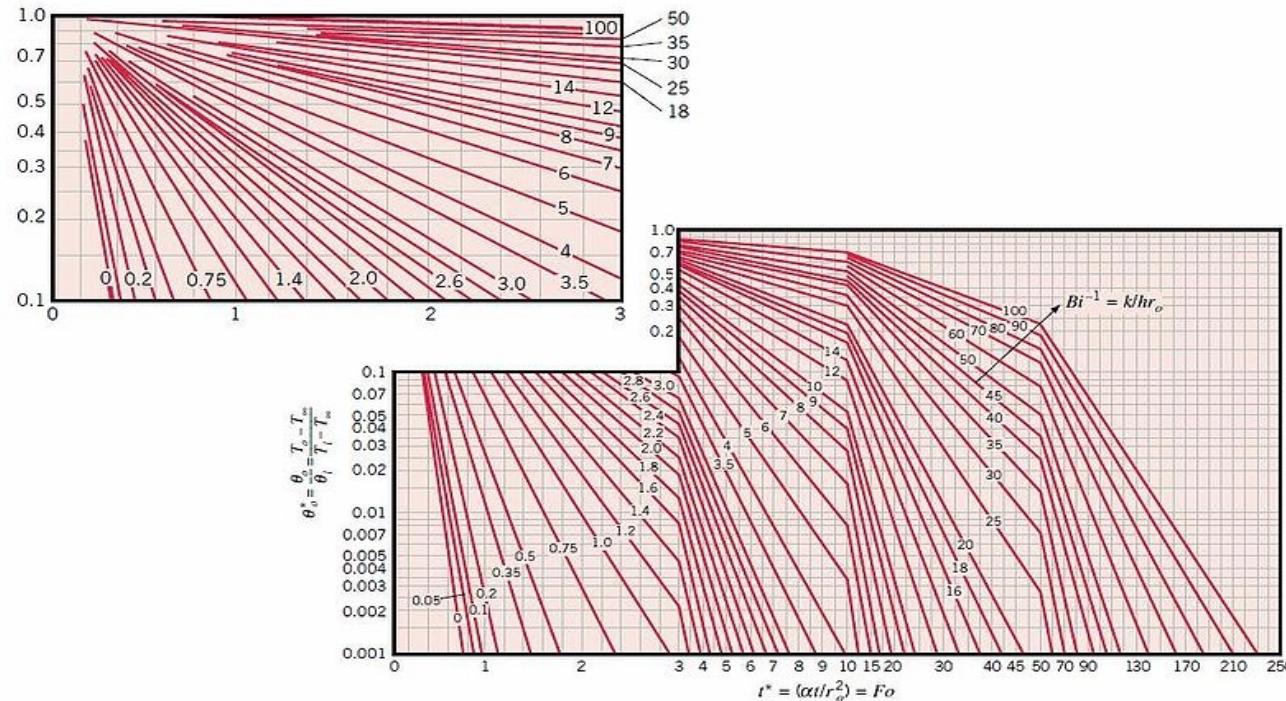
$$\frac{r}{r_0} \in [0,1]$$

$$\frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \left(\frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} \right)_{\text{FIG.4}} \cdot \left(\frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{FIG.3}}$$

To: temperatura en el eje
del cilindro = $T(r=0,t)$

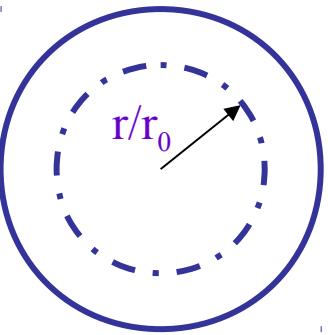


Heisler esferas



$$\frac{T(r,t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right)_{\text{FIG.6}} \cdot \left(\frac{T_o - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{FIG.5}}$$

To: temperatura en el centro de la esfera = $T(r=0,t)$



$$\frac{r}{r_0} \in [0,1]$$

Sólido Semiinfinito

Es un cuerpo idealizado que tiene una sola superficie plana y se extiende hacia el infinito en todas las otras direcciones

Se usa para indicar que el cambio de temperatura en la región cercana a la superficie se debe sólo a las condiciones en la superficie plana

A una cierta profundidad las condiciones en los alrededores no afectan la temperatura

Se considera transferencia de calor unidimensional perpendicular a la superficie plana

Sólido Semiinfinito

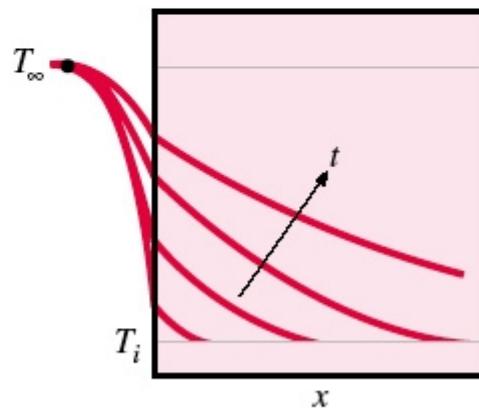
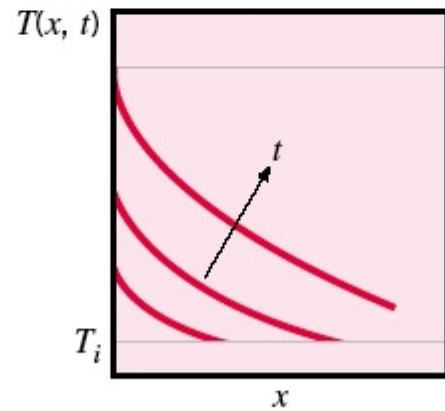
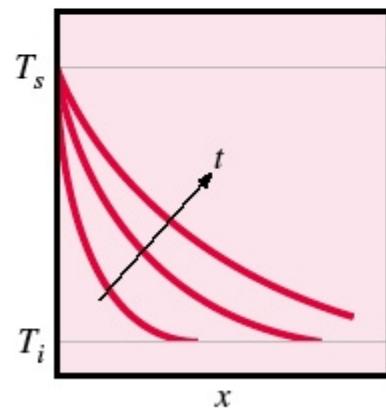
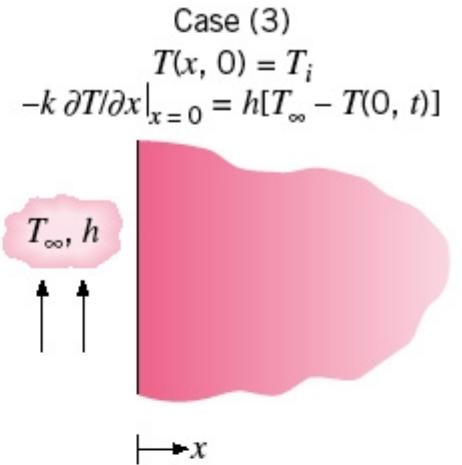
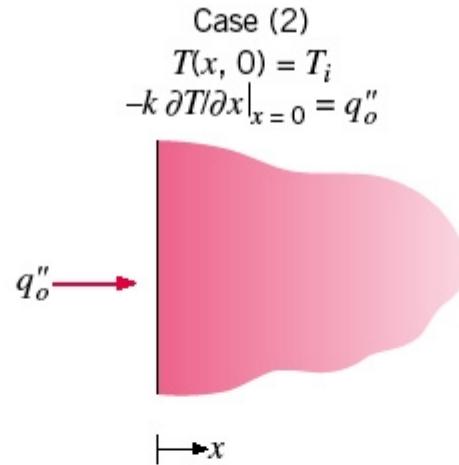
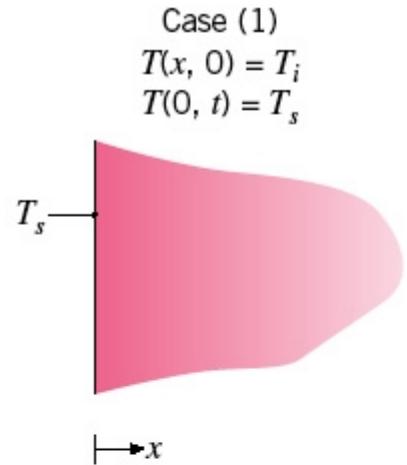


FIGURE 5.7 Transient temperature distributions in a semi-infinite solid for three surface conditions: constant surface temperature, constant surface heat flux, and surface convection.

Sólido Semiinfinito

Aproximación válida para intervalos de tiempo cortos

Cambios súbitos de las condiciones térmicas en la superficie

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} , \quad T(0, t) = T_s$$
$$T(x \rightarrow \infty, t) = T_i , \quad T(x, 0) = T_i$$

Haciendo un cambio de variables

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = -2\eta \frac{\partial T}{\partial \eta}$$
$$T(\eta = 0) = T_s , \quad T(\eta \rightarrow \infty) = T_i$$

Solido Semiinfinito

Soluciones

1. Temperatura superficial conocida y constante

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_s - T_i} = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right), \quad \dot{q}_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

2. Flujo de calor superficial constante

$$T(x,t) - T_i = \frac{\dot{q}_s}{k} \left[\sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right]$$

3. Convección superficial

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_\infty - T_i} = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

Donde **erf** es la función de error y **erfc=1-erf** función error complementaria

Sólido Semiinfinito

Función de error

$$erf(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-u^2} du$$

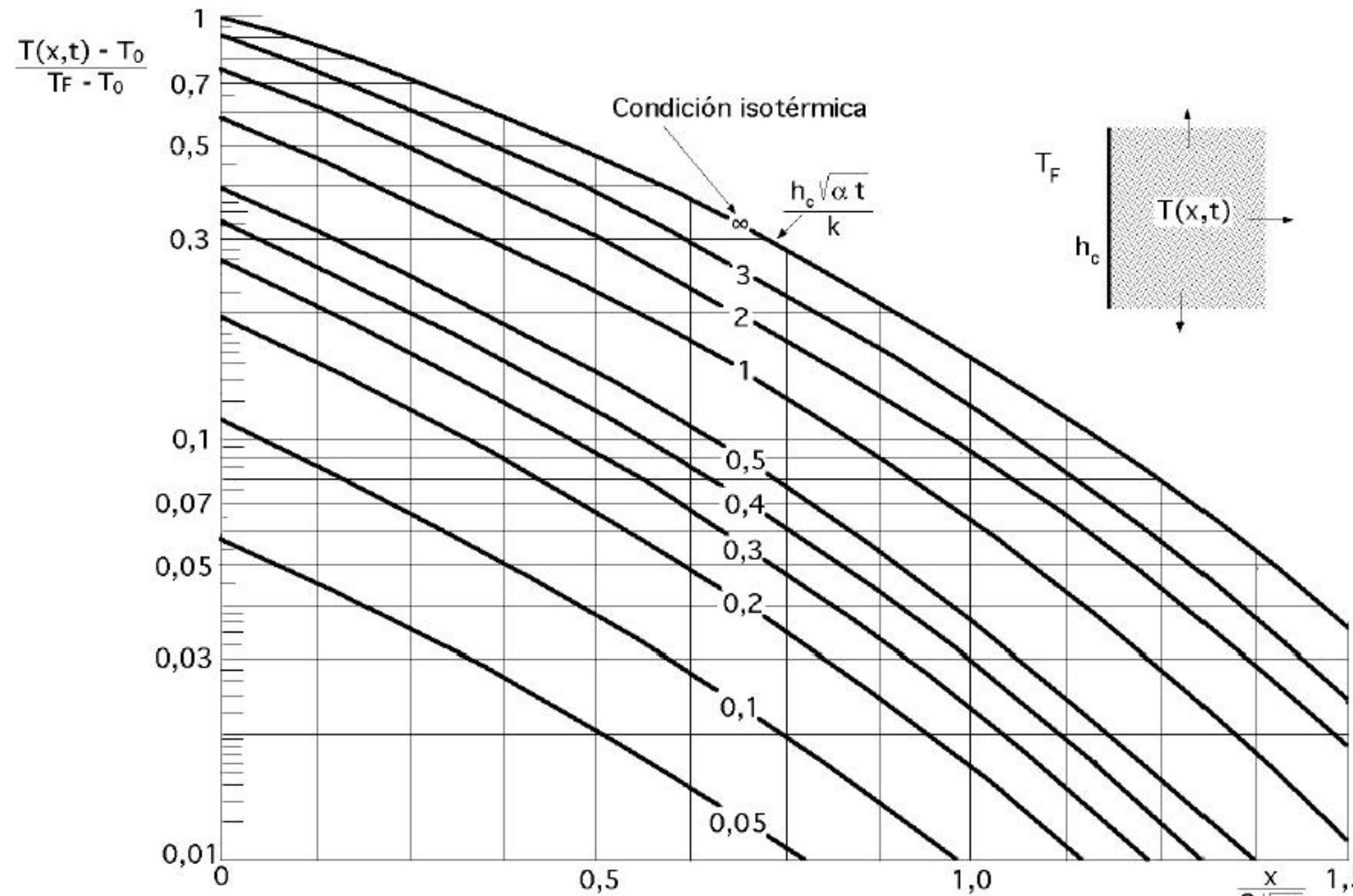
Función de error complementaria

$$erfc(w) = 1 - erf(w)$$

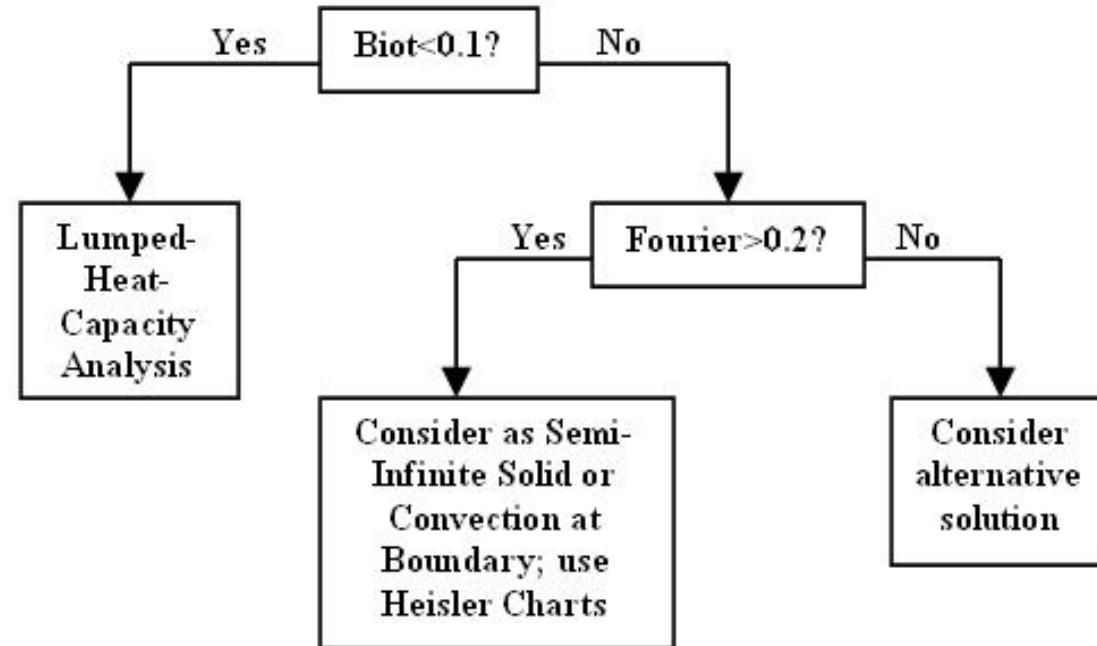
La variable u es una variable ficticia

x	erf(x)	erfc(x)	x	erf(x)	erfc(x)
0.00	0.0000000	1.0000000	1.30	0.9340079	0.0659921
0.05	0.0563720	0.9436280	1.40	0.9522851	0.0477149
0.10	0.1124629	0.8875371	1.50	0.9661051	0.0338949
0.15	0.1679960	0.8320040	1.60	0.9763484	0.0236516
0.20	0.2227026	0.7772974	1.70	0.9837905	0.0162095
0.25	0.2763264	0.7236736	1.80	0.9890905	0.0109095
0.30	0.3286268	0.6713732	1.90	0.9927904	0.0072096
0.35	0.3793821	0.6206179	2.00	0.9953223	0.0046777
0.40	0.4283924	0.5716076	2.10	0.9970205	0.0029795
0.45	0.4754817	0.5245183	2.20	0.9981372	0.0018628
0.50	0.5204999	0.4795001	2.30	0.9988568	0.0011432
0.55	0.5633234	0.4366766	2.40	0.9993115	0.0006885
0.60	0.6038561	0.3961439	2.50	0.9995930	0.0004070
0.65	0.6420293	0.3579707	2.60	0.9997640	0.0002360
0.70	0.6778012	0.3221988	2.70	0.9998657	0.0001343
0.75	0.7111556	0.2888444	2.80	0.9999250	0.0000750
0.80	0.7421010	0.2578990	2.90	0.9999589	0.0000411
0.85	0.7706681	0.2293319	3.00	0.9999779	0.0000221
0.90	0.7969082	0.2030918	3.10	0.9999884	0.0000116
0.95	0.8208908	0.1791092	3.20	0.9999940	0.0000060
1.00	0.8427008	0.1572992	3.30	0.9999969	0.0000031
1.10	0.8802051	0.1197949	3.40	0.9999985	0.0000015
1.20	0.9103140	0.0896860	3.50	0.9999993	0.0000007

Sólido Semiinfinito



Variación de la temperatura con la posición y el tiempo

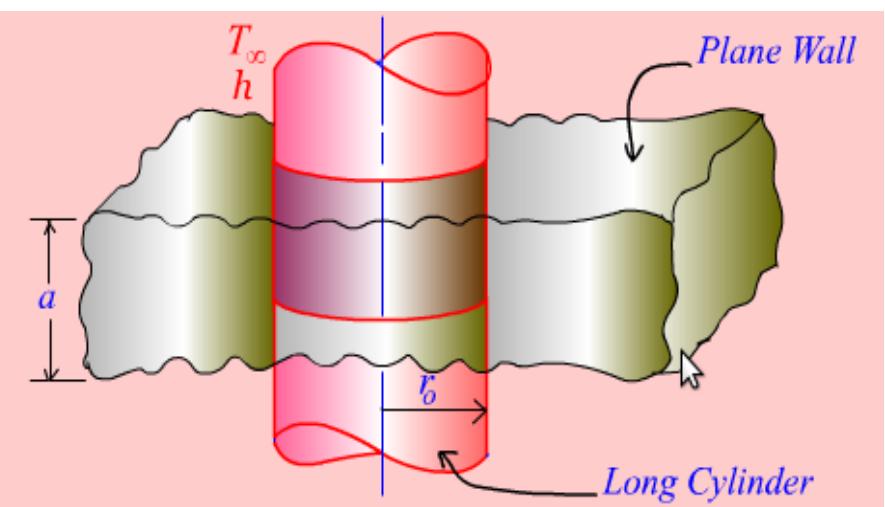
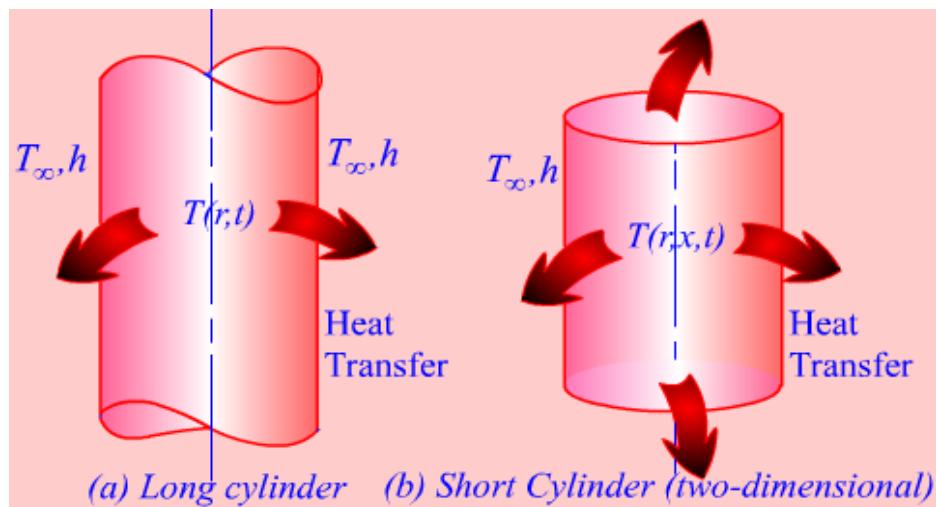


Ejercicio

Una tabla gruesa de madera ($k=0.17\text{W/m}^\circ\text{C}$ y $\alpha=1.28 \times 10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$) que esta inicialmente a una temperatura uniforme de 25°C se expone a gases calientes a 550°C durante un periodo de 5min. El coeficiente de transferencia de calor entro los gases y la tabla es de $35\text{W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$. Si la temperatura de ignición de la tabla es de 450°C , determine si se encenderá.

Conducción en sistemas multidimensionales

- Algunas configuraciones pueden ser estudiadas usando los procedimientos explicados anteriormente y superponiéndolos
==>**solución producto** (multiplicación de casos 1D)
- <Deben estar rodeados por el mismo fluido a una T_∞ y h constantes
- Un cilindro corto (2D), por ejemplo, puede ser considerado como una intersección entre un cilindro y una placa plana infinita que se cruzan perpendicularmente



Conducción en sistemas multidimensionales

- La temperatura en el cilindro corto sera:

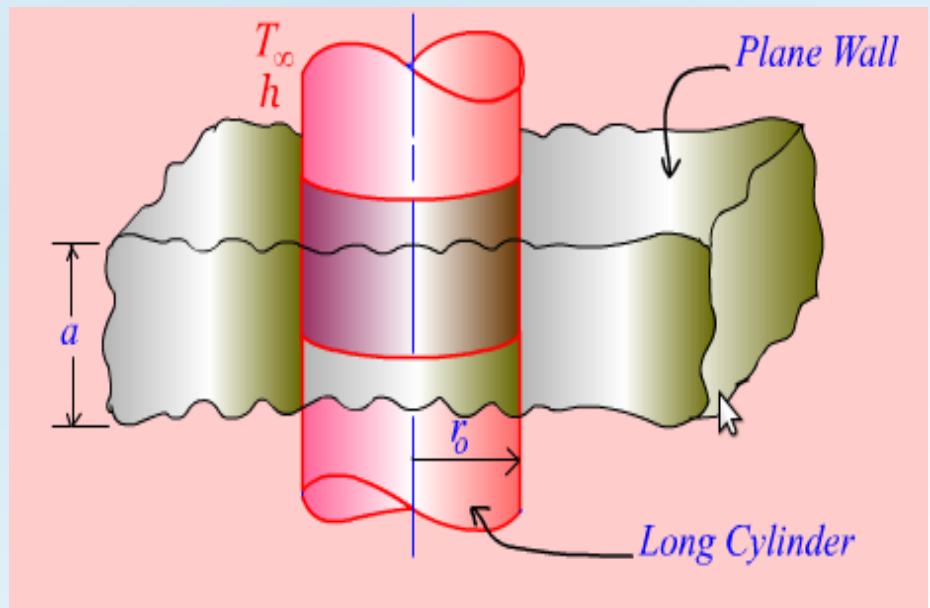
$$\left(\frac{T(r, x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{cil. \text{ corto}} = \left(\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{placa} \left(\frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{cil}$$

- Las soluciones 1D se denotan

$$\theta_{placa}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{placa}$$

$$\theta_{cil}(r, t) = \left(\frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{cil}$$

$$\theta_{semiinf}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{sol. semiinfinito}$$



Conducción en sistemas multidimensionales

- La transferencia de calor en el cilindro corto sera:

$$\left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_{total\ 2D} = \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_1 \right]$$

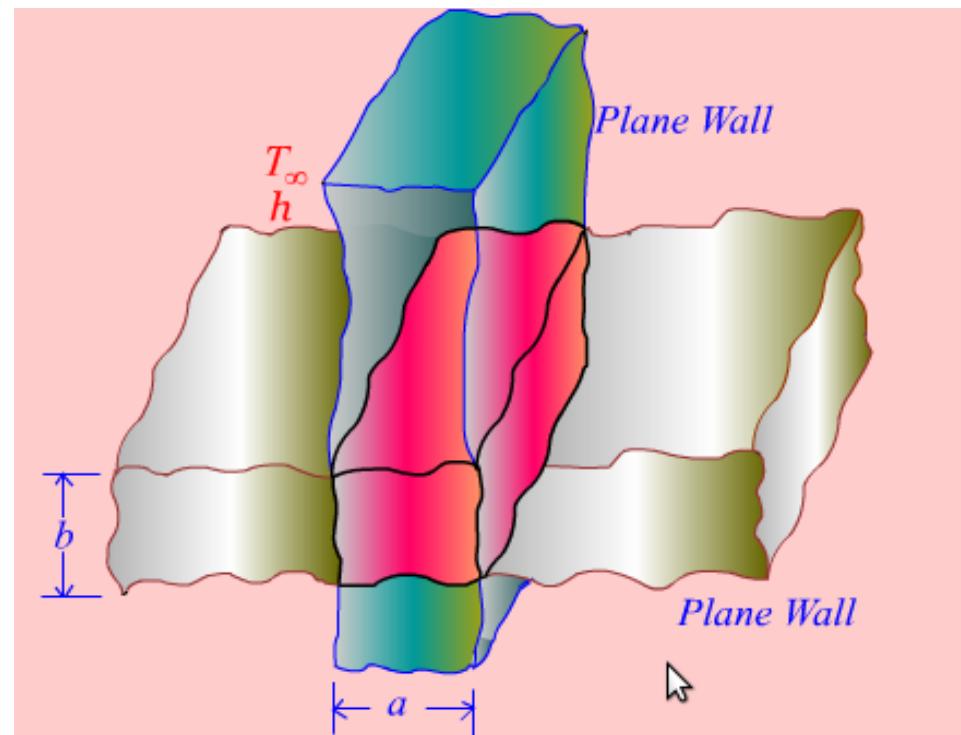
- Para un cuerpo 3D es:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_{total\ 2D} = & \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_1 \right] \\ & + \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_3 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_1 \right] \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)_2 \right] \end{aligned}$$

Conducción en sistemas multidimensionales

- La temperatura una barra rectangular sólida es:

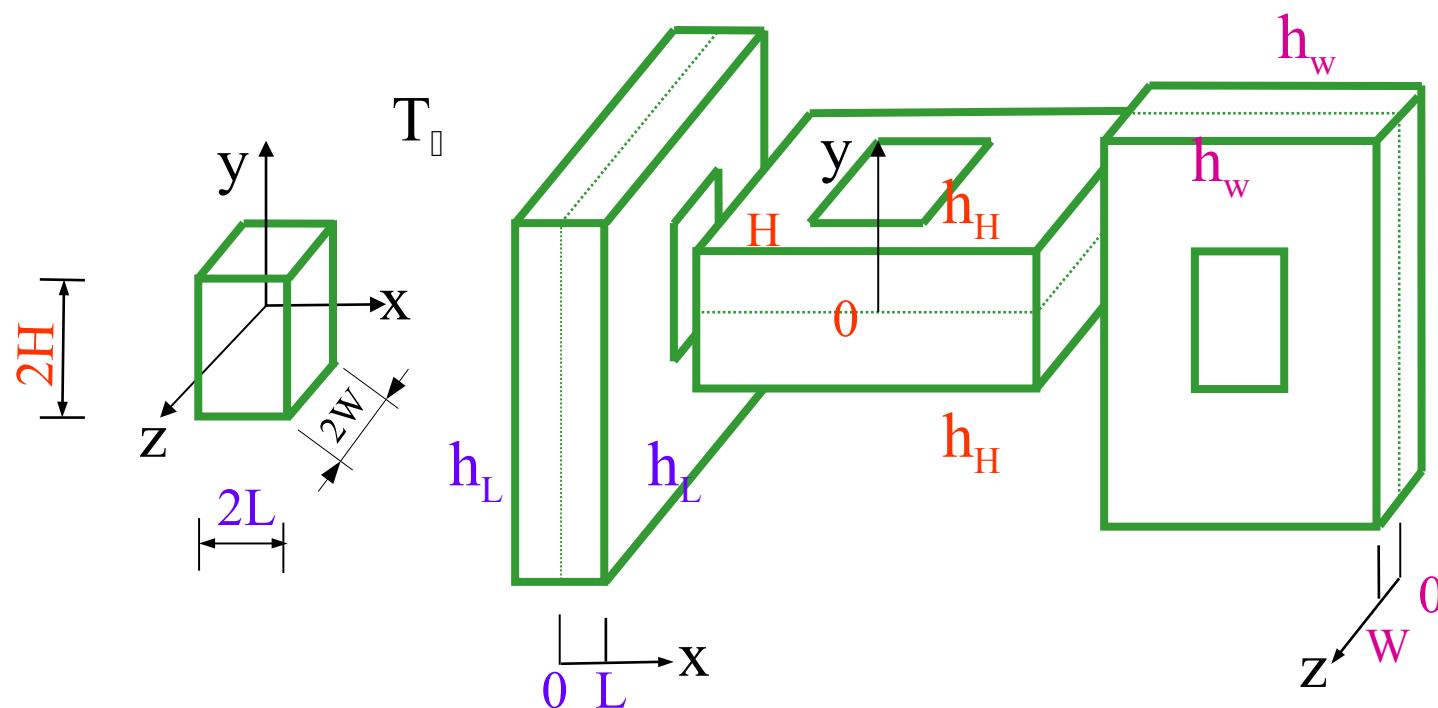
$$\theta_{barra}(x, y, t) = \left(\frac{T(x, y, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{barra} = \theta_{placa}(x, t) \theta_{placa}(y, t)$$



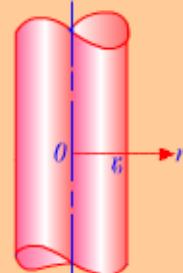
Conducción en sistemas multidimensionales

- La temperatura un prisma sólido de medidas $2H \times 2L \times 2W$:

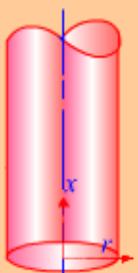
$$\theta_{prisma}(x, y, z, t) = \theta_{placa}(x, t) \theta_{placa}(y, t) \theta_{placa}(z, t)$$



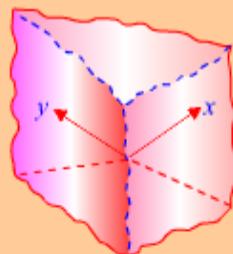
Conducción en sistemas multidimensionales



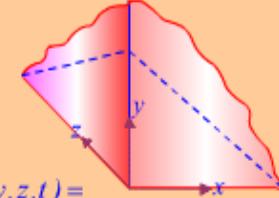
$\theta(r,t) = \theta_{cyl}(r,t)$
(a) Infinite cylinder



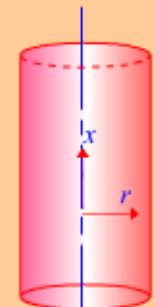
$\theta(r,t) = \theta_{cyl}\theta_{semi-inf}(x,t)$
(a) Semi-Infinite cylinder



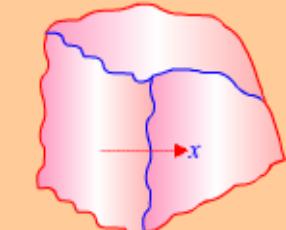
$\theta(x,y,t) = \theta_{semi-inf}(x,t)\theta_{semi-inf}(y,t)$
Quarter-Infinite Medium



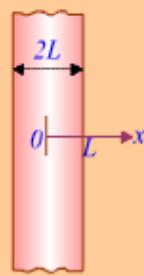
$\theta(x,y,z,t) = \theta_{semi-inf}(x,t)\theta_{semi-inf}(y,t)\theta_{semi-inf}(z,t)$
Corner Region of a Large Medium



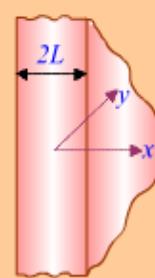
$\theta(r,t) = \theta_{cyl}\theta_{wall}(x,t)$
Short Cylinder



$\theta(x,t) = \theta_{semi-inf}(x,t)$
Semi-infinite medium

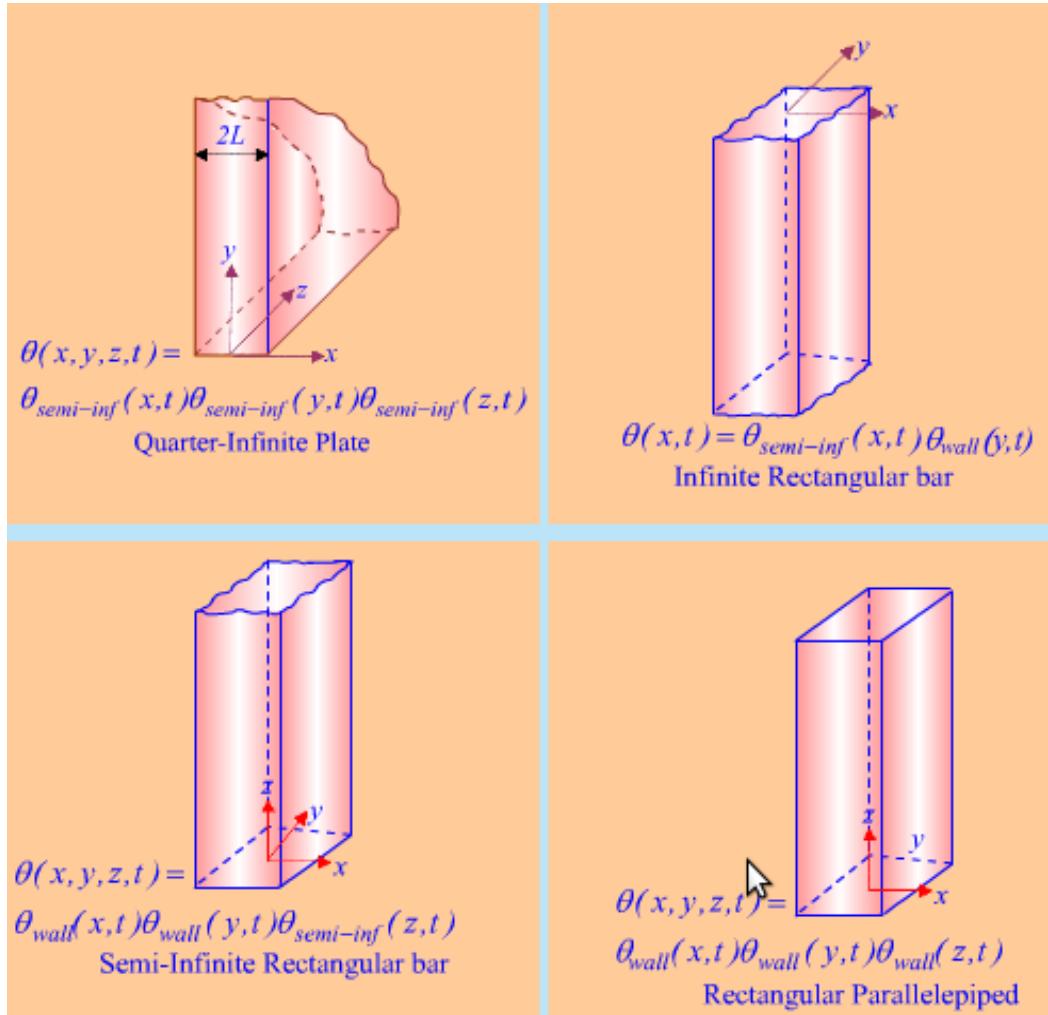


$\theta(x,t) = \theta_{wall}(x,t)$
Infinite Plate(or Plane Wall)



$\theta(x,y,t) = \theta_{wall}(x,t)\theta_{inf}(y,t)$
Semi-Infinite Plate

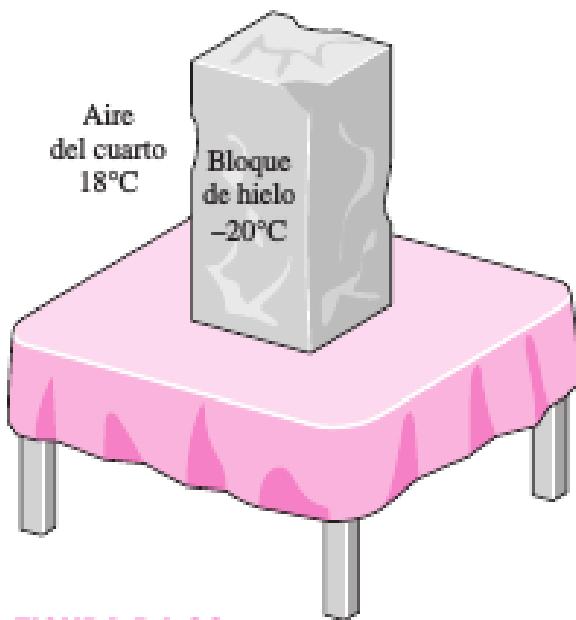
Conducción en sistemas multidimensionales



Ejercicio



Un bloque rectangular de hielo ($k=2.22\text{W/m}^{\circ}\text{C}$ y $\alpha=0.124\times10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$) de 5cm de alto y base cuadrada de 4 cm X 4cm inicialmente a -20°C se coloca sobre una mesa en una habitación a 18°C . El coeficiente de transferencia de calor sobre las superficies expuestas del bloque de hielo es de $12\text{ W/m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Si se descarta toda transferencia de calor de la base hacia la mesa, determine cuánto tiempo transcurrirá antes que el hielo se empiece a fundir. ¿En dónde se formarán las primeras gotas de líquido?



Ejercicio

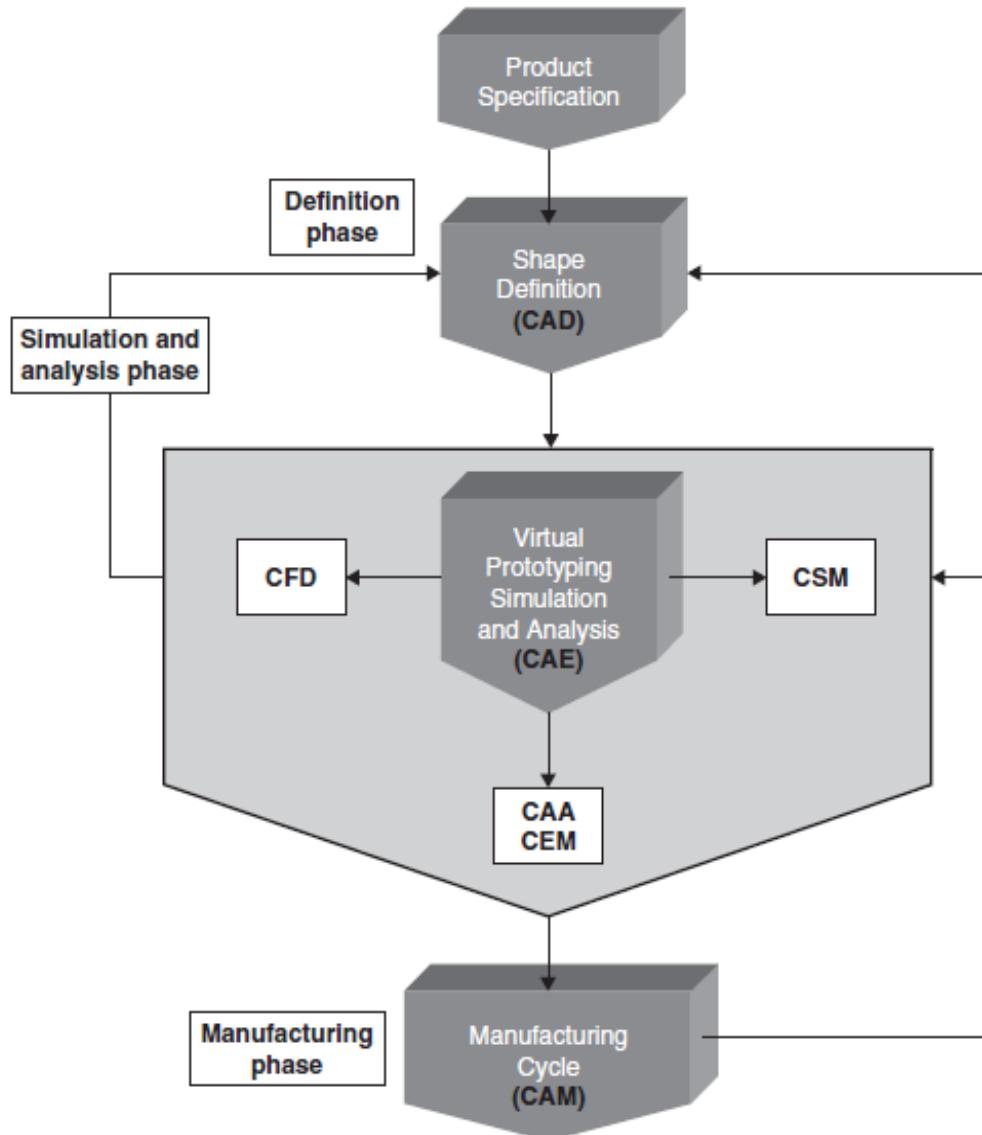
Considere un bloque cúbico cuyos lados tienen 5cm y un bloque cilíndrico cuya altura y diámetro también son de 5cm. Los dos bloques se encuentran al principio a 20°C y están hechos de granito ($k=2.5\text{W/m}^{\circ}\text{C}$, $\alpha=1.15\times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$). Ahora los dos bloques se exponen en un horno a gases calientes a 500°C sobre todas sus superficies, con un coeficiente de transferencia de calor de $40\text{W/m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Determine la temperatura en el centro de la superficie superior de una de las configuraciones al cabo de 10min.

Sección 2

Métodos numéricos

- La disponibilidad de computadores rápidos y software poderosos y fáciles de usar han tenido un alto impacto en la práctica ingenieril
- Hoy día los ingenieros tienen que conocer el **fenómeno físico**, el **modelo matemático** que lo rige, aplicar **correctamente** las herramientas computacionales y ser capaces de **interpretar** los resultados
- Es un error usar un código sin **entender** cómo se está resolviendo el problema ==> el código no debe ser una **caja negra**
- El know-how adquirido al resolver problemas sencillos es indispensable

Introducción: ciclo producción asistido



CAD: computer-assisted design

CAE: computer-assisted engineering

CSM: computational solid mechanics

CFD: computational fluid dynamics

CAA: computational aero-acoustic

CEM: computational electro-magnetics

CAM: computer assisted manufacturing

Introducción: CFD ventajas

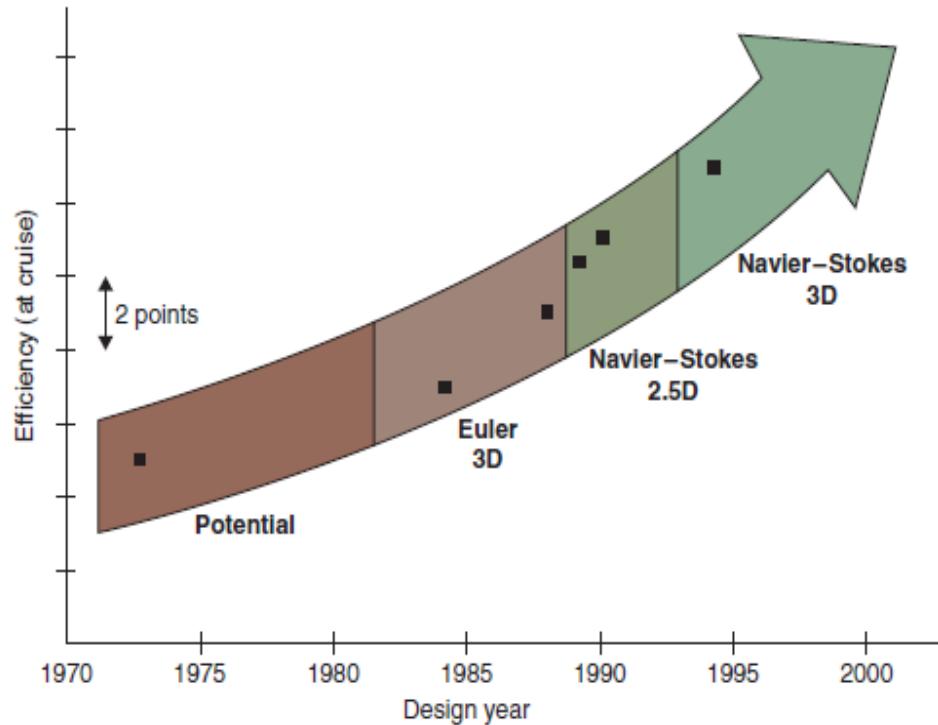
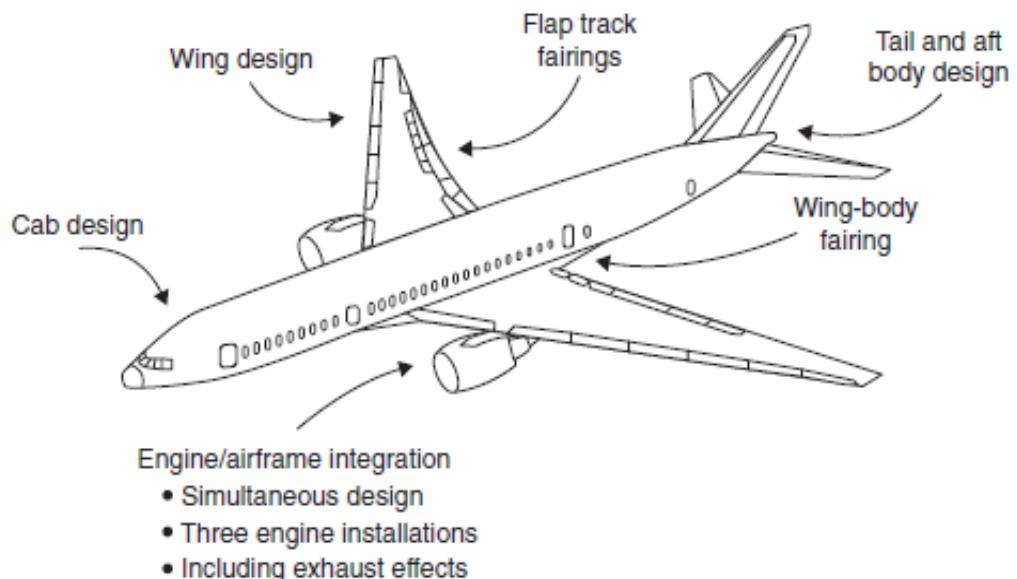
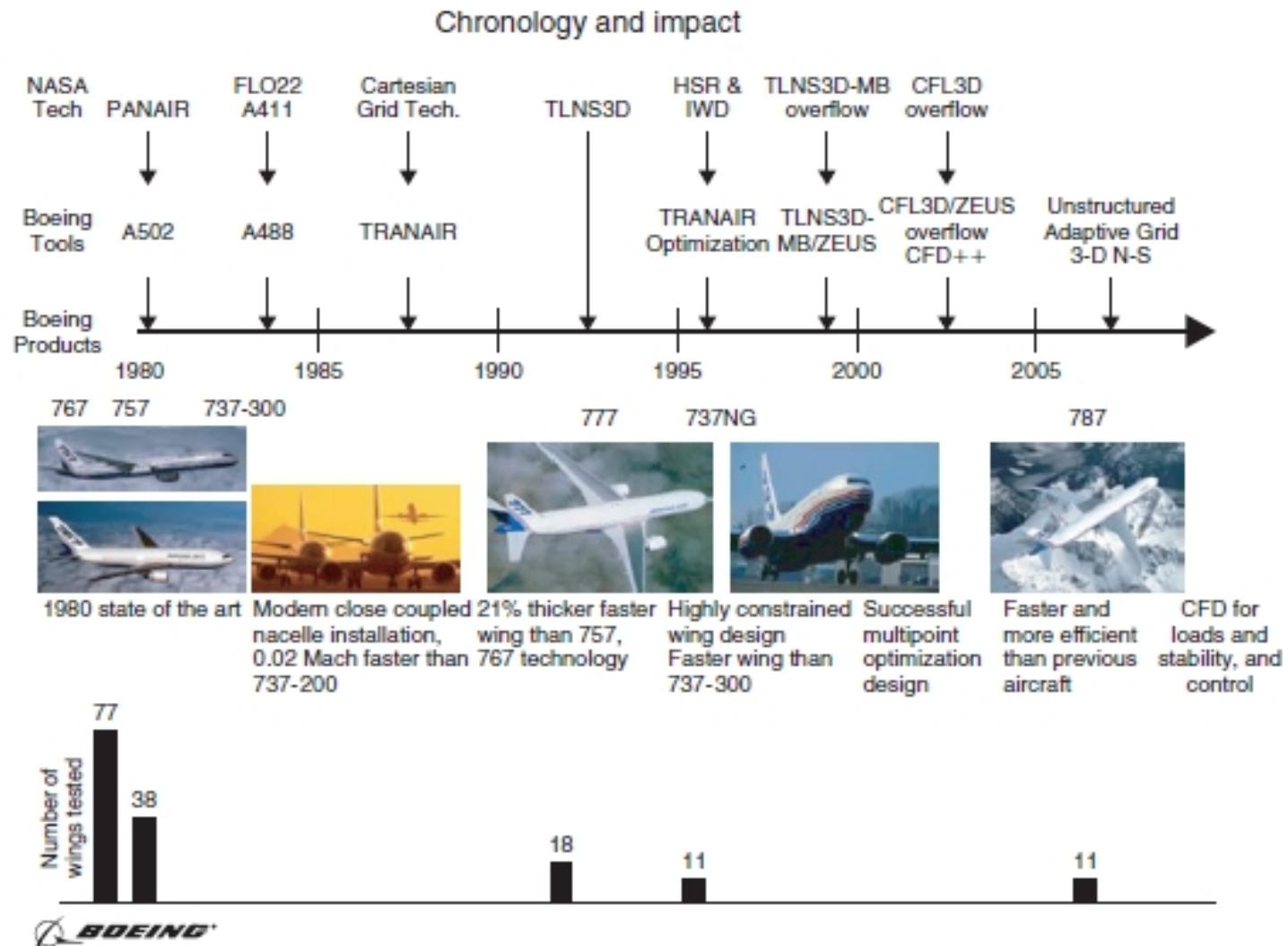


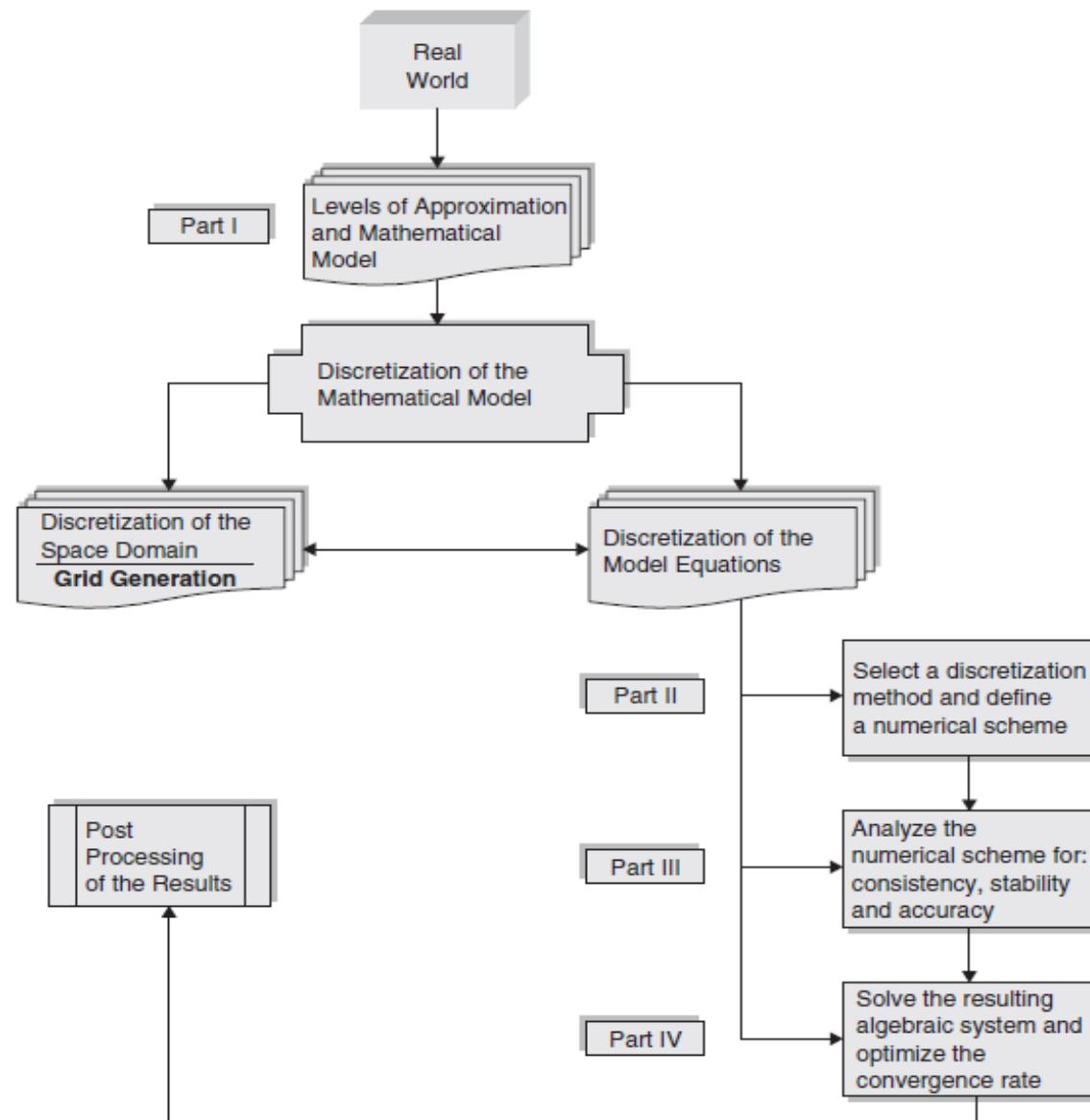
Plate I.1.4 *Impact of CFD on SNECMA fan performance, over a period of 30 years. From Escuret et al. (1998).*



Introducción: CFD BOEING

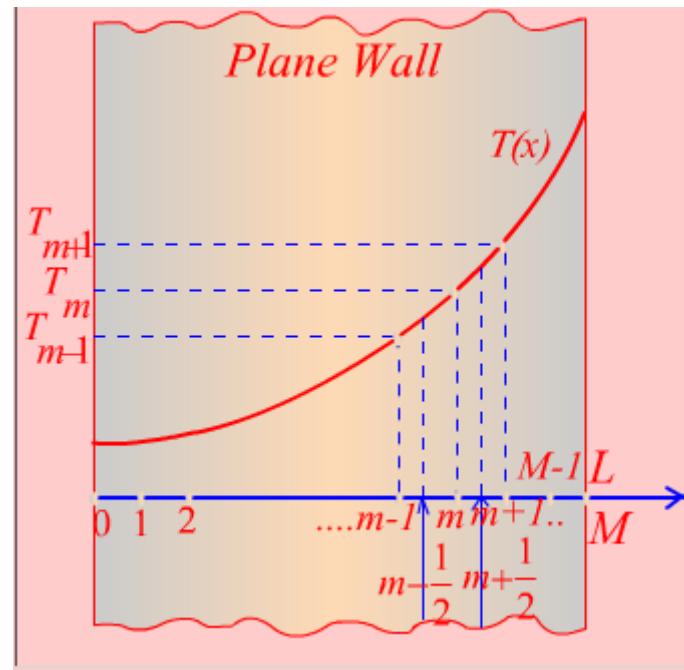
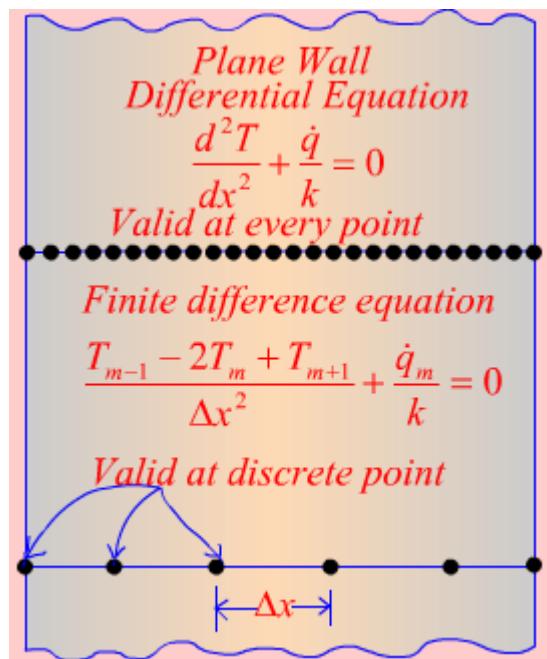


Introducción: estructura simulación CFD



Introducción

- Los métodos numéricos convierten las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas
- El dominio es dividido en un conjunto de puntos, volúmenes, etc.
- La solución analítica provee una función continua, mientras la solución numérica es discreta



- Los métodos numéricos son básicamente de tres tipos: elementos finitos, diferencias finitas y volúmenes finitos.
- Elementos finitos generalmente usados en resistencia de materiales y diseño de máquinas.
- En el método de las diferencias finitas las derivadas son reemplazadas por diferencias.
- En volúmenes finitos se realiza una integración considerando que el valor en el punto es representativo del volumen de control que lo rodea

- En diferencias finitas se usa la definición de la derivada

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

